УДК 530.12:531.18

Г. Е. Горелик

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА, ОСНОВАННОЙ НА МЕТРИКЕ

Предложен новый подход к размерности пространства-времени, позволяющий учесть возможность изменения размерности в зависимости от масштаба явления.

В физике существуют серьезные основания считать осмысленным следующее утверждение. Для явлений достаточно больших пространственно-временных масштабов пространство-время — 3+1-мерно, а для достаточно малых — дискретно (например, нульмерно, или по крайней мере не 3+1-мерно) [1]. Другая возможность на малых расстояниях — отсутствие вообще определенной размерности ([2], с. 40). «Большие» и «малые» масштабы может определять, например, фундаментальная длина ([1], с. 251).

В настоящей работе, во-первых, демонстрируется, что в рамках топологических представлений о размерности пространства невозможно даже моделировать подобную ситуацию, т. е. согласовать 3+1-мерную («в большом») и возможную дискретную («в малом») структуры пространства и учесть возможность изменения размерности при изменении масштаба явления. При этом следует отметить, что математически наиболее общее в настоящее время представление о размерности пространства существует в топологии [3]. С другой стороны, наиболее глубокое описание структуры физического пространства осуществляется сейчас на топологическом языке [4, 5].

Чтобы пояснить сказанное выше, рассмотрим такой пример. Пусть множество $D^3(a)$ — бесконечная кубическая решетка с шагом a в трехмерном евклидовом пространстве E^3, т. е. множество всех точек с координатами (k_1a, k_2a, k_3a), где k_i — целые числа. Можно было бы ожидать, что множество $D^3(a)$ при достаточно малом a (или точнее, при рассмотрении подмножеств $D^3(a)$, больших по сравнению с a) достаточно хорошо приближалось бы по свойствам (и, в частности, по размерности) к E^3. Однако с точки зрения топологии подобное утверждение бессмысленно. Действительно, три основных определения размерности *ind*, *Ind*, *dim* ([3], с. 160, 164) совпадают даже для более широкого класса пространств, чем евклидовы пространства, многообразия и любые их подмножества. Топологическое определение размерности по существу локально, т. е. относится к «сколь угодно малой» окрестности точки, и не может «заметить» переход через какой-то выделенный масштаб a. В силу этих определений размерность «пространства» $D^3(a)$ равна нулю независимо, разумеется, от величины a. Более того, даже пространство, состоящее из всех рациональных точек E^3 (т. е. точек, у которых все координаты — рациональные числа), нульмерно, хотя такое пространство кажется вообще физически неотличимым от E^3.

Рассмотренные простые примеры свидетельствуют о невозможности сделать осмысленным в рамках топологических представлений приведенное в начале статьи утверждение.

В связи с этим в настоящей работе предпринята попытка дать такое определение размерности, которое могло бы учесть возможность изменения размерности пространства в зависимости от масштаба явлений, и в то же время было бы эквивалентно обычному определению в соответствующем пределе (т. е. для евклидова пространства и многообразия). Обычное определение размерности многообразия (пространства-времени общей теории относительности) связано, как известно, с возможностью гомеоморфного отображения евклидова пространства E^k на некоторую окрестность каждой точки многообразия. Предлагаемое новое определение размерности основывается на анализе и обобщении следующей геометрической идеи: в n-мерном евклидовом пространстве E^n необходимо зафиксировать равно n точек, чтобы положение любой другой точки можно было бы задать полностью с помощью задания n величин — расстояний до фиксированных точек. Это утверждение остается справедливым, если слово «расстояние» заменить на «псевдоевклидов интервал».

Перейдем к систематическому изложению.

Как известно, риманово многообразие можно описывать с помощью двухточечной симметричной вещественной функции — интервала (мировой функции Синга [6]) $I(p, q)=\int\limits_p^q ds$, где интеграл берется по геодезической. Это описание эквивалентно в определенном смысле [6] обычному описанию с помощью метрического тензора. В дальнейшем будем опираться на обобщение именно интегральной величины $I(p, q)$.

Назовем **пространством** множество точек W с заданной на нем двухточечной симметричной вещественной функцией — **интервалом** $I: W\times W\to E^1$. Свойства функции I уточним позже. Пока достаточно считать, что обычная метрика (Фреше), индефинитная метрика в пространстве Минковского и их римановские обобщения обладают этими свойствами.

Основным для дальнейшего будет понятие базиса в множестве $M\subset W$. Возможны по крайней мере три определения базиса (приведем их в порядке усиления).

Совокупность принадлежащих M точек (b_r), $r=1,\dots,n$, образует **базис** в M, если

1) для любой совокупности из n чисел (i_r) множество $\{p\in\in M: (I_r(p))=(i_r)\}$ содержит не более двух элементов. Здесь и далее $I_r(p)\equiv I(p, b_r)$;

2) для любой точки $p\in M$ существует функция $f_{p,M}$ от n непрерывных и одной дискретной переменных такая, что для любой точки $q\in M$

$$I(p, q)=f_{p,M}(\dots, I_r(q), \dots, \sigma);$$

3) существует функция F_M от $2n$ непрерывных и двух дискретных переменных такая, что для любой пары точек $p, q\in M$

$$I(p, q)=F_M(\dots, I_r(p), \dots, \sigma_p; \dots, I_r(q), \dots, \sigma_q).$$

Физической размерностью множества M ($\varphi\dim M$) назовем минимальную мощность базиса в M. Таким образом, если M n-мерно, то каждой точке из M можно приписать $n+1$ число: n «расстояний» до «опорных» точек базиса и дискретный параметр $\sigma=\pm1$, показывающий, в какой стороне от «гиперплоскости», определяемой базисом, находится эта точка (здесь естественным образом появляется двузначный параметр). И наоборот, каждому такому набору из $n+1$ числа соответствует не более одной точки, принадлежащей M.

Следует отметить, что в определениях 2 и 3 не подразумевается, что интервал — обязательно число (а не оператор, например). Это дает возможность приспособления этих определений к квантовой теории.

В случае, если пространство лишено какой-либо метрической симметрии, эти определения должны быть естественным образом обобщены. Надо рассматривать множество M одновременно со всеми его δ-деформациями и определить размерность множества M с точностью до δ как характеристику класса всех δ-деформаций M_σ.

Базис порождает естественным образом систему отсчета (координат): координатами являются интервалы до точек базиса. Рассмотрение только таких систем отсчета, которые порождены всевозможными базисами, дает естественное ограничение на произвол в выборе системы отсчета и приводит в 4-мерном случае к группе, характеризуемой 16-ю непрерывными и 4-мя дискретными параметрами (в отличие от обычной ∞-параметрической группы ОТО).

Базис можно также использовать для определения понятия последовательности Коши. Назовем последовательность точек x_k последовательностью Коши, если хотя бы для одного базиса (b_r) последовательности чисел $I_r(x_k)$ — последовательности Коши для любого r. Это позволяет ставить вопрос о метрической (а не только геодезической) полноте псевдориманова пространства, что может быть важно при исследовании сингулярностей в ОТО, так как известна неоднозначность, связанная с геодезической полнотой [4].

Чтобы иметь возможность говорить о свойствах пространства в малом, введем (в качестве размера пространственно-временной области M) пространственный и временной диаметры M:

$$d_s^2(M) = \sup I(p, q), \quad d_t^2(M) = -\inf I(p, q); \quad p, q \in M.$$

Эти величины вполне естественны, так как в физике следует рассматривать взаимовлияние всех событий, участвующих в некотором физическом явлении, т. е. должны быть малы по сравнению с фундаментальной длиной все попарные «расстояния» событий, участвующих в некотором явлении, а не только «расстояния» до какого-то одного события. Вырожденным является только множество событий, лежащих на каком-то одном световом луче, но оно же физически нереально (потому что «в любом взрыве осколки разлетаются в разные стороны»).

Назовем ρ,τ-окрестностью точки p всякое множество $\Omega(p;\ \rho,\ \tau)$ такое, что $p \in \Omega$, $d_{s,t}(\Omega) < \rho$, $\tau > 0$ и Ω — максимальное множество такого рода, т. е. к нему нельзя добавить ни одной точки без нарушения этих свойств. В случае обычной метрики (Фреше) для любого $\tau > 0$ $\Omega(p;\ \rho,\ \tau)$ — шар радиуса ρ. В случае интервала в $n+1$-мерном (в обычном смысле) пространстве Минковского $\Omega(p;\ \rho,\ \tau)$ — цилиндр $S^n(\rho) \times [0,\ \tau]$ или фигура, полученная из этого цилиндра с помощью произвольного «преобразования Лоренца».

Система окрестностей $\{\Omega(p;\ \rho,\ \tau)\}$ порождает топологию (в римановом пространстве обычную). В общем случае следует потребовать, чтобы интервал порождал хаусдорфову систему окрестностей и чтобы из $\Omega\ (p;\ \rho,\ \tau) \subset \Omega(p_1;\ \rho_1,\ \tau_1)$ следовало бы $\rho \leqslant \rho_1$ и $\tau \leqslant \tau_1$.

Отметим, что A-топология в ОТО (предбаза которой — всевозможные конусы прошлого и будущего), использующая только причинную структуру пространства, совпадает с топологией многообразия лишь при некоторых условиях [4].

Назовем ε-сетью в W всякое множество $\Sigma_\varepsilon \subset W$ такое, что для любой точки $p \in W$ и любой ее ε-окрестности $\Omega(p;\ \varepsilon,\ \varepsilon)$ найдется точка $q \in \Sigma_\varepsilon$, принадлежащая $\Omega(p;\ \varepsilon,\ \varepsilon)$.

Рассмотрим теперь E^n, интервалом в котором можно в дальнейшем считать и обычное евклидово расстояние, и псевдоевклидов интервал. При этом ε-сеть в E^n как нечто n-мерное характеризует

Теорема. Пусть Σ_ε — ε-сеть в E^n и $M \subset \Sigma_\varepsilon$. Тогда

$$\forall \delta \exists D\ (M = \Omega(p;\ a,\ b) \wedge a,\ b > D) \Rightarrow \varphi \dim M_\delta = n.$$

Приведем простые примеры.

1. Множество параллельных прямых в E^2 (плоскостей в E^3), отстоящих друг от друга на расстояние a, в больших масштабах (т. е. при $d_{s,t}(M) > a$) 2-мерно (3-мерно), а в малом 1-мерно (2-мерно).

2. Множество точек в E^n с целочисленными координатами в большом (по сравнению с единицей) n-мерно, а в малом нульмерно.

С помощью понятия базиса можно ввести определение размерности множества, более «плавно» меняющейся в зависимости от его размеров, связывая размерность со степенью неопределенности задания положения точки. Так, неопределенность задания положения точки в «дискретном» пространстве, образованном кубической решеткой в E^3, с помощью базиса из одной точки возрастает при увеличении масштаба a как a^2, при базисе из двух точек — как a, при базисе из трех точек — не зависит от a; но даже при базисе из одной точки эта неопределенность не обращается в ∞ ни при каком a. Поэтому базиса из одной точки становится «не достаточно», лишь когда эта неопределенность ($\sim a^2$) достаточно велика.

Сейчас модели теории поля или удержания кварков изучаются иногда для 1+1- или 2+1-мерного пространства с намерением перенести получаемые результаты на «реальный» 3+1-мерный случай; при этом в случае меньших размерностей проблемы расходимостей снимаются и удается естественным образом удержать кварки. Развиваемый подход позволяет рассматривать это как свидетельство меньшей, чем 3+1, размерности пространства на малых расстояниях точно так же, как устойчивость планетных орбит и спектр водорода связываются с 3+1-мерностью пространства в соответствующих масштабах [7]. Возможно следует не пытаться переносить n-мерные ($n < 3+1$) результаты в современной физике на случай $n = 3+1$, а развивать «маломерную» физику и научиться согласовывать ее с обычной 3+1-мерной.

Корректная реализация идей фундаментальной длины, дискретного пространства, безусловно, возможна только при участии квантовых представлений. В квантовом варианте аппарата, который выше описан для классического случая, роль базиса может выполнять полный набор метрических операторов $\hat{l}\ (p,\ q)$. В перестановочных соотношениях, определяющих некоммутативные свойства алгебры операторов, должна появиться $\hbar$, фундаментальность которой может быть связана именно с ее «геометрическим» происхождением.

Автор благодарен за обсуждение этой работы Д. А. Киржницу, В. П. Фролову, А. С. Шварцу, а также А. В. Архангельскому и участникам руководимого им семинара по теории размерности (мехмат МГУ) и Е. С. Фрадкину и участникам руководимого им семинара (ФИАН). Автор благодарен Л. П. Грищуку за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М., 1970.
2. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. I. М., 1977.
3. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М., 1973.
4. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М., 1977.
5. Пенроуз Р. Структура пространства-времени. М., 1972.
6. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963.
7. Ehrenfest P. Collected scientific papers. Amsterdam, 1959, p. 400; Tangerlini F. R. «Nuovo Cim.», 1963, 27, 636.

Поступила в редакцию
17.5 1977 г.
ГАИШ